

差集偶与最佳二进阵列偶的组合研究方法

许成谦

(燕山大学信息科学与工程学院,秦皇岛 066004)

摘 要: 本文提出了一类新的区组设计——差集偶的概念. 研究了差集偶的性质, 给出了差集偶与最佳二进阵列偶之间的关系. 为应用差集偶这种区组设计的方法研究最佳二进阵列偶提供了理论依据.

关键词: 信号设计; 区组设计; 差集偶; 最佳二进阵列偶

中图分类号: TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 01-0087-03

Differences Set Pairs and Approach for the Study of Perfect Binary Array Pairs

XU Cheng-qian

(The College of Information science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: A new block design (differences set pairs) is defined. The properties of differences set pairs are studied. The relationship between differences set pairs and perfect binary array pairs is given. Theoretical basis for using differences set pairs to research perfect binary array pairs is provided.

Key words: signal design; block design; differences set pairs; perfect binary arrays pairs

1 引言

在雷达、声纳、码分多址等系统的信号设计中, 往往要求信号具有良好的自相关特性, 即要求信号序列与自身延迟信号序列的共轭序列的内积为脉冲函数. 这样的信号具有能将该信号与自身延迟信号区分开来的特性^[1,2]. 在使用这种信号检测准则的系统中, 往往要求发送端的信号序列与接收端中计算自相关函数时所用的本地序列是同一信号序列. 文献[3,4]提出了一类新的最佳信号——最佳二进阵列偶. 应用这种阵列偶可以使系统的接收端使用与发送端不同的信号进行相关信号检测, 即在系统的发送端任选阵列偶中的一个阵列做为传输信号, 而用阵列偶中另一个阵列做接收端的本地阵列, 通过计算阵列偶的自相关函数(两个阵列的互相关函数)来达到提取信息的目的. 最佳二进阵列偶是比最佳二进阵列更广的最佳信号. 最佳二进阵列偶的提出, 为工程应用提供了更广泛的信号选择. 基于最佳二进阵列偶的研究背景, 本文首先提出了一类新的区组设计-差集偶的概念. 研究了差集偶的性质, 证明了最佳二进阵列偶与一类特殊的差集偶的等价关系. 为应用差集偶这种新的区组设计方法研究最佳二进阵列偶提供了理论依据, 也为最佳二进阵列偶提供了新的研究方法.

2 差集偶的概念和性质

本文采用如下符号: Z_{s_k} 表示模 s_k 剩余类整环; $Z_{s_1} \times \dots \times$

Z_{s_n} 表示 Z_{s_1}, \dots, Z_{s_n} 的笛卡尔积; $E = \prod_{i=1}^n s_i$.

定义 1 设 U, V 是有限群 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 的两个子集, k, k 分别为集合 U, V 所含元素的个数, 即 $k = |U|, k = |V|$, 若对 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 中的任意元素 $(g_1, \dots, g_n) (0, \dots, 0)$ 在差表 $\{(u_1, \dots, u_n) - (v_1, \dots, v_n) \mid (u_1, \dots, u_n) \in U, (v_1, \dots, v_n) \in V\}$ 中恰好出现 k 次, 则称 (U, V) 为 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 上的 (E, k, k) -差集偶.

例如, $U = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 和 $V = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ 是有限群 Z_8 的两个子集, 观察下列差表

1	4-3	5-4	7-6
2	3-1	5-3	6-4
3	4-1	6-3	7-4
4	5-1	7-3	3-7
5	6-1	3-6	4-7
6	7-1	4-6	5-7
7	3-4	5-6	6-7

可知 Z_8 中每个非零元素在差表中恰好出现 3 次. 因此 $U = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 和 $V = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ 是 $(8, 5, 5)$ -差集偶.

当 $U = V$ 时, 差集偶 (U, V) 退化为通常的差集^[5]. 显然若 U 是差集, 则 (U, U) 是一个差集偶. 但是若 (U, V) 是差集偶, U 和 V 不一定是差集. 例如, $U = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3)\}$ 和 $V = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1,$

$2), (2,0), (2,2), (2,3)$ 是有限群 $Z_3 \times Z_4$ 的两个子集. 列出差表可以验证 (U, V) 是 $(12, 7, 7, 4)$ -差集偶. 但是 U 和 V 都不是差集. 因此差集偶是比差集更广的一类区组设计.

为了分析差集偶的性质方便, 将 n 维向量与 n 元多项式作如下对应:

定义 2 设 $U = \{ (j_1^{(i)}, \dots, j_n^{(i)}) \mid i = 1, \dots, k \}$ 是有限群 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 的子集. 若

$$U(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^k x_1^{j_1^{(i)}} \dots x_n^{j_n^{(i)}}$$

则称多项式 $U(x_1, \dots, x_n)$ 为集合 U 的 Hall 多项式.

例如设 $U = \{ (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (2,2), (2,3) \}$ 是 $Z_3 \times Z_4$ 的子集, 则 U 的 Hall 多项式为 $U(x_1, x_2) = x_2 + x_2^2 + x_1 + x_1 x_2 + x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^3$.

差集偶的 Hall 多项式具有如下的性质:

定理 1 设 $U = \{ (j_1^{(i)}, \dots, j_n^{(i)}) \mid i = 1, \dots, k \}$ 和 $V = \{ (l_1^{(i)}, \dots, l_n^{(i)}) \mid i = 1, \dots, k \}$ 是有限群 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 的两个子集. $U(x_1, \dots, x_n)$ 和 $V(x_1, \dots, x_n)$ 分别是 U 和 V 的 Hall 多项式. 则 (U, V) 是集合 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 上的 (E, k, k, \dots) -差集偶的充要条件是

$$U(x_1, \dots, x_n) V(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = e^{-} + T(x_1, \dots, x_n).$$

其中 $e = |U \cap V|$; $T(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(j_1, \dots, j_n) \in Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$.

证明 因为

$$\begin{aligned} & U(x_1, \dots, x_n) V(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) \\ &= \left(\prod_{p=1}^k x_1^{j_1^{(p)}} \dots x_n^{j_n^{(p)}} \right) \left(\prod_{q=1}^k x_1^{-l_1^{(q)}} \dots x_n^{-l_n^{(q)}} \right) \\ &= \prod_{1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq k} (x_1^{j_1^{(p)} - l_1^{(q)}} \dots x_n^{j_n^{(p)} - l_n^{(q)}}) \\ &= \prod_{\substack{g_i \in Z_{s_i}, 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq k}} (x_1^{g_1} \dots x_n^{g_n}) \end{aligned}$$

所以 $U(x_1, \dots, x_n) V(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = e^{-} + T(x_1, \dots, x_n)$ 成立的充要条件是

$$1 = \begin{cases} e, (g_1, \dots, g_n) = (0, \dots, 0) \\ \dots, (g_1, \dots, g_n) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}$$

而上式成立的充要条件是 (U, V) 是 (E, k, k, \dots) -差集偶. 证毕.

定理 2 设 (U, V) 是集合 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 上的 (E, k, k, \dots) -差集偶, $\bar{U} = Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n} - U, \bar{V} = Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n} - V$, 则 (\bar{U}, \bar{V}) 是集合 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 上的 $(E, E-k, E-k, \dots, E-k-k+)$ -差集偶.

证明 由关系式

$$\begin{aligned} \bar{U}(x_1, \dots, x_n) &= T(x_1, \dots, x_n) - U(x_1, \dots, x_n), \\ \bar{V}(x_1, \dots, x_n) &= T(x_1, \dots, x_n) - V(x_1, \dots, x_n), \\ U(x_1, \dots, x_n) V(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) &= e^{-} + T(x_1, \dots, x_n), \\ x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} T(x_1, \dots, x_n) &= T(x_1, \dots, x_n), \\ T(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) &= T(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

可以算出 $\bar{U}(x_1, \dots, x_n) \bar{V}(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = E-k-k+e^{-}$

$(E-k-k+)+ (E-k-k+)$ $T(x_1, \dots, x_n)$. 因为 $E-k-k+e = |\bar{U} \cap \bar{V}|$, 所以由定理 1 知 (\bar{U}, \bar{V}) 是 $(E, E-k, E-k, E-k-k+)$ -差集偶. 证毕.

定义 3 定理 2 中产生的差集偶 (\bar{U}, \bar{V}) 称为差集偶 (U, V) 的补差集偶. 简称 (U, V) 的补.

由定理 2 可知, 如果构造出 $k, k < E/2$ 的差集偶, 那么即可构造出 $k, k > E/2$ 的差集偶.

定理 3 (E, k, k, \dots) -差集偶 (U, V) 的各参数之间满足如下关系式:

$$kk = (E-1) + e \tag{1}$$

其中 $e = |U \cap V|$.

证明 应用定理 1. 将 $(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1)$ 代入 $U(x_1, \dots, x_n) V(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = e^{-} + T(x_1, \dots, x_n)$, 即得 $kk = (E-1) + e$. 证毕.

3 差集偶与最佳二进阵列偶的关系

定义 4^[3,4] 设 $A = [a(j_1, \dots, j_n)]$ 和 $B = [b(j_1, \dots, j_n)]$ 是 n 维 $s_1 \times \dots \times s_n$ 阶二进阵列, $a(j_1, \dots, j_n), b(j_1, \dots, j_n) = \pm 1$. 对任意 $(u_1, \dots, u_n) \in Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$, 称

$$R_{(A,B)}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{j_0=0}^{s_1-1} \dots \prod_{j_n=0}^{s_n-1} a(j_1, \dots, j_n) b(j_1 + u_1, \dots, j_n + u_n),$$

为阵列偶 (A, B) 的自相关函数. 其中 $j_i + u_i = (j_i + u_i) \bmod s_i, i = 1, \dots, n$. 若

$$R_{(A,B)}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} F, (u_1, \dots, u_n) = (0, \dots, 0) \\ 0, (u_1, \dots, u_n) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}$$

则称阵列偶 (A, B) 为 n 维 $s_1 \times \dots \times s_n$ 阶最佳二进阵列偶.

定义 5 设 $A = [a(j_1, \dots, j_n)]$ 是 n 维 $s_1 \times \dots \times s_n$ 阶 $(1, -1)$ 二进阵列. U 是有限群 $Z_{s_1} \times \dots \times Z_{s_n}$ 的子集, 若 $U = \{ (j_1, \dots, j_n) \mid a(j_1, \dots, j_n) = -1 \}$, 则称 U 为阵列 A 的等价集. 称 A 为集合 U 的特征阵列.

定理 4 设 $A = [a(j_1, \dots, j_n)]$ 和 $B = [b(j_1, \dots, j_n)]$ 是 n 维 $s_1 \times \dots \times s_n$ 阶二进阵列, U 和 V 分别是 A 和 B 的等价集, $k = |U|, k = |V|$. 则 (A, B) 为最佳二进阵列偶的充要条件是: (U, V) 为参数满足条件

$$E-2(k+k)+4 = 0 \tag{2}$$

的 (E, k, k, \dots) -差集偶.

证明 设 $a(j_1, \dots, j_n) = 1 - 2p(j_1, \dots, j_n), b(j_1, \dots, j_n) = 1 - 2q(j_1, \dots, j_n)$. 因为 U 和 V 分别是 A 和 B 的等价集. 所以有

$$p(j_1, \dots, j_n) = \begin{cases} 1, (j_1, \dots, j_n) \in U \\ 0, (j_1, \dots, j_n) \notin U \end{cases}$$

$$q(j_1, \dots, j_n) = \begin{cases} 1, (j_1, \dots, j_n) \in V \\ 0, (j_1, \dots, j_n) \notin V \end{cases}$$

又因为

$$R_{(A,B)}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{j_1=0}^{s_1-1} \dots \prod_{j_n=0}^{s_n-1} a(j_1, \dots, j_n) b(j_1 + u_1, \dots, j_n + u_n)$$

